

Sur le problème de navigation de Zermelo en contrôle optimal.

Jérémy Rouot ¹

LMBA & Univ Brest, France

AG LMBA

25 Novembre 2022, Quimper

¹en collaboration avec B. Bonnard (UBFC & INRIA)



Problématiques en Théorie du Contrôle

- **Contrôlabilité.**

Trouver une trajectoire d'un espace donné aux extrémités contraintes.

- **Contrôle Optimal.**

En plus de la contrôlabilité, **optimiser** un certain coût.

- **Stabilisation.**

Une fois une trajectoire planifiée, la rendre insensible aux perturbations extérieures.

- **Observabilité.**

Reconstruire l'état complet à partir d'informations partielles.



Diverses applications



- **Mécanique:** automobile (guidage, Electronic Stability Control (ESC)), **robotique, mécanique spatiale**

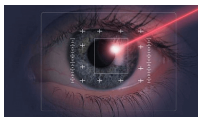
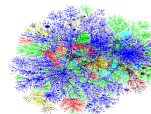
- **Biologie, Médecine:** système proie-prédateurs, **contrôles d'épidémies, chirurgie laser**, thérapie du cancer, biomécanique

- **Électricité, Électronique:** thermostats, **internet**, photographie



- **Économie:** optimisation de gain, contrôle des flux financiers, prévisions des marchés, **Réseau de neurones**

- **Chimie:** cinétique chimique, distillation, **pétrochimie**

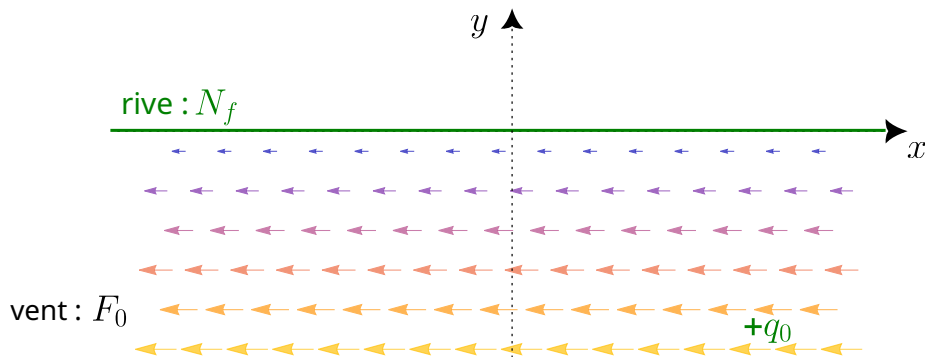


Problème historique de navigation de Zermelo

Problème historique en Calcul des Variations. [Zermelo, 1931]

Dans un plan où une distribution de vent est donnée par un champ de vecteurs de la position, un bateau navigue à vitesse relative constante par rapport au vent.

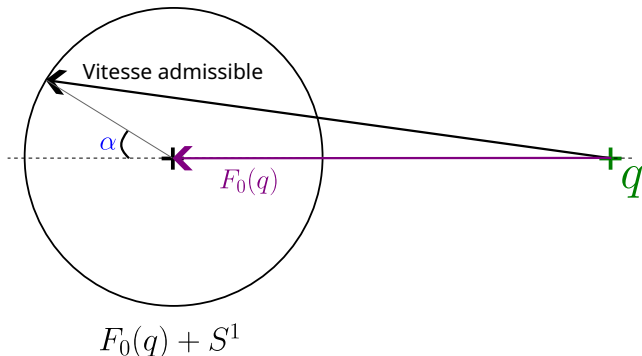
*Quel est le chemin nautique que le bateau doit emprunter pour atteindre **en temps minimal** la rive N_f à partir d'un point initial q_0 ?*



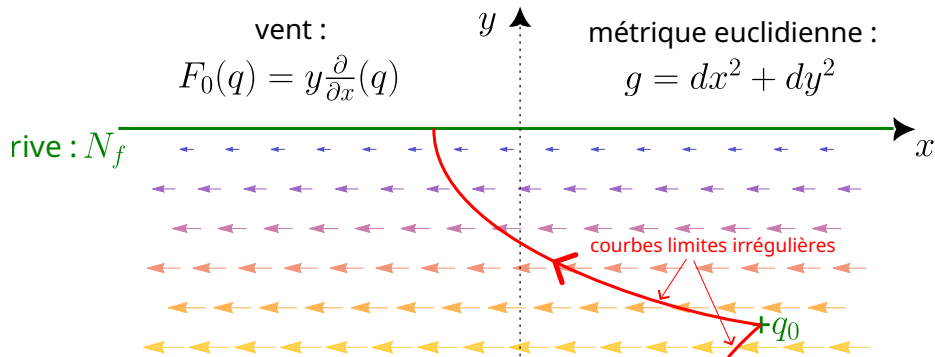
Problème historique de navigation de Zermelo

Directions admissibles. $\frac{dq}{dt}(t) := \dot{q}(t) \in F_0(q(t)) + S^1$

Pour tout t , trouver l'angle de cap α :



Problème historique de navigation de Zermelo



Théorème

Les courbes limites irrégulières sont limites de courbes qui passent entre ces deux courbes limites.

Théorème

La courbe limite irrégulière arrivant en N_f est optimale.



Généralisation du problème de Zermelo en contrôle optimal

Soit un triplet (M, g, F_0) où

- M : variété différentiable de dimension 2,
- g : métrique Riemannienne sur M ,
- F_0 : champ de vecteurs sur M .

Étude locale

On considère une base orthonormée (F_1, F_2) pour la métrique g et on considère le problème de contrôle temps minimal :

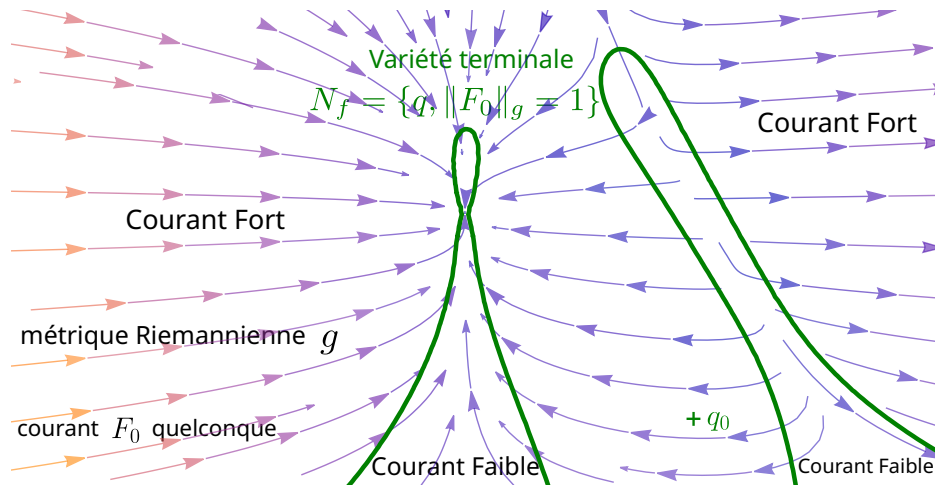
$$\dot{q}(t) = F_0(q(t)) + \cos \alpha(t) F_1(q(t)) + \sin \alpha(t) F_2(q(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, t_f],$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_f) \in N_f,$$

$$\min_{\alpha(\cdot)} t_f.$$

- état du système : $q \in Q$ (ouvert de \mathbb{R}^n)
- contrôle : α mesurable borné sur $[0, t_f]$,
- variété terminale de codimension 1 : N_f .





- courant fort : $\|F_0\|_g > 1$
- courant faible : $\|F_0\|_g < 1$
- $\{q, \|F_0(q)\|_g = 1\}$ est le lieu de colinéarité :

$$C = \{q, \exists \alpha, F_0(q) = \cos \alpha F_1(q) + \sin \alpha F_2(q)\}.$$



Questions

Pour le problème de Zermelo général,

- quelles singularités peuvent avoir les géodésiques sur le lieu de colinéarité ?
- quelle est la régularité de la fonction valeur :

$$t_f(q_0) := \inf_{\alpha(\cdot)} \{t_f, \dot{q} = F_0 + \cos \alpha F_1 + \sin \alpha F_2, q(0) = q_0, q(t_f) = q_f\}?$$



Reparamétrisation avec la transformation de Goh

On pose $\tilde{q} = (q, \alpha)$ et on contrôle $\frac{d\alpha}{dt}$.

On considère alors les champs de vecteurs

$$X(\tilde{q}) = F_0(q) + \cos \alpha F_1(q) + \sin \alpha F_2(q), \quad Y(\tilde{q}) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(q)$$

et le système de contrôle s'écrit :

$$\dot{\tilde{q}}(t) = X(\tilde{q}(t)) + u(t) Y(\tilde{q}(t)) \quad p.p. \ t \in [0, t_f].$$

avec $u(t) \in \mathbb{R}$.



Théorie du Contrôle Optimal



On introduit l'ensemble des **états accessibles** en temps t_f :

$$A(q_0, t_f) = \bigcup_{u \in \mathcal{U}} E_{t_f, q_0}(u),$$

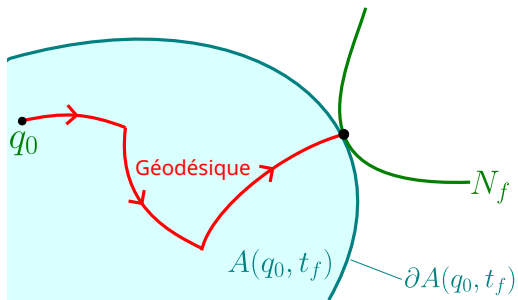
où E_{t_f, q_0} est l'application entrée/sortie qui à $u(\cdot) \in L^\infty([0, t_f], U)$ associe $q(t_f, q_0, u)$.

Sous de faibles hypothèses, on peut se restreindre à considérer des contrôles **constants par morceaux** $u(\cdot)$ et l'ensemble accessible $A(q_0, t_f)$ est composé des orbites pour l'action du pseudogroupe

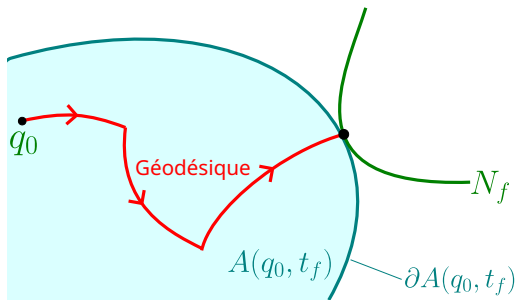
$$S(\{F, G\}) = \{\exp t_1 F \circ \exp t_2 G \circ \cdots \circ \exp t_k G, t_1 + \cdots + t_k = t_f, t_i > 0, k \in \mathbb{N}\}$$

avec $F = X - Y$, $G = X + Y$ et les **géodésiques** appartiennent à la frontière de l'ensemble accessible.





Il apparaît alors suffisant de calculer $A(q_0, t_f)$ et sa frontière.



Il apparaît alors suffisant de calculer $A(q_0, t_f)$ et sa frontière.

Mauvaise nouvelle : Cette frontière n'a pas nécessairement de bonnes propriétés de régularité.

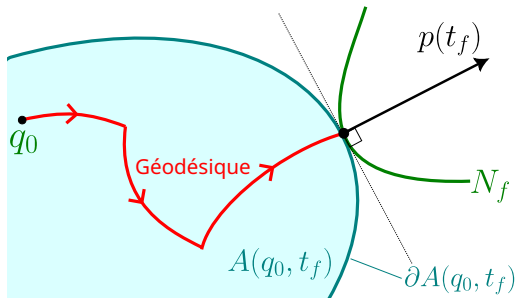


Principe du Maximum de Pontryaguine

Théorème (Pontryaguine et al. 1958)

*Paramétrisation de la frontière de l'ensemble accessible en relevant le système dans le fibré cotangent T^*M .*

Les géodésiques sont projections d'extrémales (\tilde{q}, p) solution d'un système Hamiltonien contraint.



Principe du Maximum et classification des extrémales

Classification des extrémales.

- **Régulières** : $u(t) = \pm 1$ p.p.
- **Singulières** : $u(\cdot)$ est une singularité de l'application entrée/sortie E_{t_f, q_0} .
- Exceptionnelles : indépendantes du coût.

Flot singulier. Notons : $D = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], Y])$ et $D' = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], X])$.

Le contrôle singulier u_s est donné par $u_s(\tilde{q}) = -\frac{D'(\tilde{q})}{D(\tilde{q})}$ et on s'intéresse au flot singulier :

$$\dot{\tilde{q}} = Z(\tilde{q}) := X(\tilde{q}) + u_s(\tilde{q})Y(\tilde{q}).$$

sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{D(q) = 0\}$.



Lien entre classification : trajectoires singulières / systèmes par feedback

Groupe de feedbacks affines

$G_F = \{(\varphi, a, b)\}$ où:

- φ changement de coordonnées
- $u \leftarrow a(q) + ub(q)$, $b(q) \neq 0$

agit comme des changements de variables : $(\varphi, a, b) \cdot Z = \varphi * Z$.

Proposition (B. Bonnard, SIAM, 1991)

L'application $\Lambda : (X, Y) \mapsto Z$ est un covariant.

$$\begin{array}{ccc} (X, Y) & \xrightarrow{\Lambda} & Z := X + u_s Y \\ G_F \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow G_F \\ (X', Y') & \xrightarrow{\Lambda} & \varphi * Z' \end{array}$$

Utiliser le flot singulier pour calculer des invariants de l'action de G_F .



Optimalité des trajectoires singulières

Le caractère minimal des trajectoires singulières temps minimales est invariant par l'action de G_F .

⇒ calculs des invariants par l'action de G_F .

Optimalité des extrémals singulières pour des temps petits [Krener,SIAM,1977]

$$D = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], Y]), D' = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], X]), D'' = \det(Y, [Y, X], X).$$

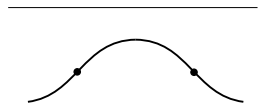
- **Singulières Hyperboliques** : $DD'' > 0 \Rightarrow$ temps minimisantes
- **Singulières Elliptiques** : $DD'' < 0 \Rightarrow$ temps maximisantes
- **Singulières Exceptionnelles** : $D'' = 0 \Rightarrow$ temps minimisantes ou maximisantes



Un peu de théorie des singularités

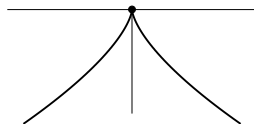
Déploiement d'une parabole semi-cubique

$$x^3 + \varepsilon x^2 + y^2 = 0$$



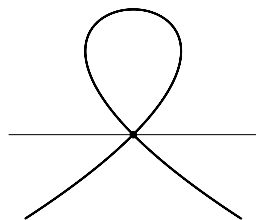
nœud complexe $\varepsilon > 0$

deux tangentes complexes



point de rebroussement $\varepsilon = 0$
de première espèce

demi-tangente



nœud réel $\varepsilon < 0$

deux tangentes réelles



Retour sur le problème de Zermelo

Proposition (Déploiement des géodésiques par rapport à $\alpha(0)$.)

- *Les géodésiques qui ne sont pas des immersions sont nécessairement anormales.*
- *Les géodésiques hyperboliques correspondent aux nœuds réels.*
- *Les géodésiques elliptiques existent seulement dans le courant fort et correspondent aux nœuds complexes.*



Proposition

Let (M, g, F_0) be a two dimensional Zermelo navigation problem and q_1 be a point on the boundary $\{\|F_0\|_g = 1\}$ between the strong current domain and the weak current domain. Assume that the geodesic $\sigma(\cdot)$ is not an immersion at $q_1 = \sigma(0)$. In the extended space (x, y, α) we consider $\tilde{q}_1 = (q_1, \alpha_1)$ a point on the collinearity set C and $\tilde{\sigma}(\cdot) := (\sigma(\cdot), \alpha(\cdot))$, the integral curve passing through \tilde{q}_1 of the differential equation

$$\dot{\tilde{q}} = X(\tilde{q}) - \frac{D'(\tilde{q})}{D(\tilde{q})} Y(\tilde{q}), \quad (1)$$

where $X = F_0 + \cos \alpha F_1 + \sin \alpha F_2$, $Y = \frac{\partial}{\partial \alpha}$, $D = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], Y])$ and $D' = \det(Y, [Y, X], [[Y, X], X])$.

Then, we have the two cases:

- ① If $\dot{\alpha}(0) \neq 0$ and the curve $\{\|F_0(q)\|_g = 1\}$ is regular at q_1 then σ has a semicubical cusp at q_1 .
- ② $\dot{\alpha}(0) = 0$: \tilde{q}_1 is a singular point with a spectrum of the form $\{\delta, \delta/2 \pm \sqrt{\delta'}\}$, where δ and δ' are real numbers.

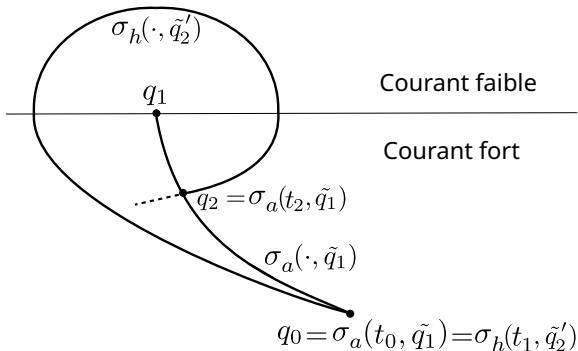
Preuve.

Forme isothermale pour g . Calculs sur une forme semi-normale par action de G_F . □

Théorème

Soit $\tilde{q}_1 = (q_1, \alpha_1)$ tel que q_1 soit un point de rebroussement de première espèce à $t = 0$ pour la géodésique anormale $\sigma_a(\cdot)$. Il existe un voisinage V de q_1 , un point q_0 dans $V \cap \sigma_a(\cdot)$ dans lequel nous avons :

- 1 L'anormale est temps minimisante à partir de q_0 jusqu'à q_1 inclus.
- 2 Les boucles démarrant en q_0 dans un voisinage conique de α_0 sont temps minimisantes jusqu'à leur intersection avec l'anormale.
- 3 La fonction valeur $t_f : q_f \mapsto t_f(q_0, q_f)$ est discontinue pour tout $q_f \neq q_1$ de l'anormale $\sigma_a(\cdot)$.



Références

- B. Bonnard, J. Rouot, B. Wembe, *Accessibility Properties of Abnormal Geodesics in Optimal Control Illustrated by Two Case Studies*, acceptée pour publication dans MCRF, 2022.
- B. Bonnard, O. Cots, B. Wembe, *Zermelo Navigation Problems on Surfaces of Revolution and Hamiltonian Dynamics*, COCV, 2021.



